

同步练习 P244 理学院 廖国勇

5. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x}\right)^n$ 的收敛域。

解: $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 \quad R = \frac{1}{\rho} = 1$

当 $\frac{x-1}{x} = -1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$ 收敛

当 $\frac{x-1}{x} = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

故 $-1 \leq \frac{x-1}{x} < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x}\right)^n$ 收敛

即 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x}\right)^n$ 收敛。

同步练习 P245 理学院 廖国勇

6. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} X^n$ 的和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$ 的和

解: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} X^n$ 的收敛域为 $[-1, 1)$, 设 $S(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} X^n$

$$\text{则 } S(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} X^n = X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^{n-1}}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^X t^{n-1} dt \quad +$$

$$= \int_0^X \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \right) dt = \int_0^X \frac{1}{1-t} dt$$

$$= -\ln(1-t) \Big|_0^X = -\ln(1-X) \quad (-1 \leq X < 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = S\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= -\ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \ln \frac{3}{2} = \ln 3 - \ln 2$$

同步练习 P245 理学院 廖国勇

7. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ 的和.

解: 容易求得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的收敛域为 $(-1, 1)$

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 则

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)'$$

$$= \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = S\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

同步练习 P245 8 理学院 廖国勇

8. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$ 的收敛域与和函数

解: $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = 1$

$$\therefore R = \frac{1}{\rho} = 1$$

当 $x=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}$ 发散

当 $x=-1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} (-1)^{n-1}$ 发散

综上所述得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$ 的收敛域为 $(-1, 1)$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (x^{n+1})''$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} \right)''$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2-1}{1-x} + \frac{1}{1-x} \right)''$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-x} \right)'' = \frac{1}{(1-x)^3} \quad (-1 < x < 1)$$

同步练习 P246 页 9. 理学院 廖国勇 2016. 5. 24

9. 将函数 $f(x) = \operatorname{arccot} x$ 展开成 x 的幂级数

解 方法一, 利用三角恒等式

$$\begin{aligned} f(x) = \operatorname{arccot} x &= \frac{\pi}{2} - \arctan x = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 + \dots) dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t^2)^n dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \end{aligned}$$

$(x \in [-1, 1])$

方法二. 直接算 (1)

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} = -(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(0+0) + f(0+0) \quad (\text{先求 } x > 0 \text{ 情况}) \\ &= \int_0^x f'(t) dt + f(0+0) \end{aligned}$$

对于 $x < 0$, 奇函数
表达式一样, 悟悟!

$$\begin{aligned} &= \int_0^x -(1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots) dt + \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \operatorname{arccot}(\Delta x) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$(-1 \leq x \leq 1)$

方法三. 直接算 (2) $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} = -(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots)$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int -(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} + C$$

$$f(1) = \operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} + C$$

$$= -(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots) + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} + \frac{\pi}{2}$$

这里利用 $\frac{\pi}{4} = (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots)$ 见教材 P220 例 3.

同步练习 P246 理学院 廖国勇

9. 将函数 $f(x) = \arctan x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

$$= -(1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots)$$

$$f(0^+) = \arctan x \big|_{x \rightarrow 0^+} = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = f(x) - f(0^+) + \int_0^x f'(t) dt + f(0^+)$$

$$= \int_0^x -(1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - t^{10} + \dots) dt + \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

注, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的取值范围就是它的收敛域.

P₂₄₆ 同步练习 理学院 廖国勇

10. 将函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 展开成 $x-2$ 的幂级数

解: $f(x) = \ln(1+x) = \ln(3+x-2)$

$$= \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{x-2}{3}\right)$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x-2}{3}\right)^n}{n} (-1)^{n-1}$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n \cdot n} (x-2)^n$$

x 的取值范围由 $-1 < \frac{x-2}{3} \leq 1$ 得 $-1 < x \leq 5$

注, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} (-1)^{n-1} \quad (-1 < x \leq 1)$

P246 理学院 廖国勇

11. 将 $f(x) = \frac{1}{6-5x+x^2}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

解: $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{(x-1)-2} - \frac{1}{(x-1)-1}$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{x-1}{2}} + \frac{1}{1 - (x-1)}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} (x-1)^n$$

x 的取值范围由 $\begin{cases} -1 < x-1 < 1 \\ -1 < \frac{x-1}{2} < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 2$

注, 利用公式 $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (-1 < x < 1)$

同步练习P47 理学院 廖国勇

12. 利用幂级数展开式求

$$\frac{1 + \frac{\pi^4}{5!} + \frac{\pi^8}{9!} + \frac{\pi^{12}}{13!} + \dots}{\frac{1}{3!} + \frac{\pi^4}{7!} + \frac{\pi^8}{11!} + \frac{\pi^{12}}{15!} + \dots}$$

解: 由 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

得 $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$

又 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$

所以 $\frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2} - \sin x}{2} = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} + \dots$

$$\frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sin x}{2} = x + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{13}}{13!} + \dots$$

于是,
$$\frac{1 + \frac{\pi^4}{5!} + \frac{\pi^8}{9!} + \frac{\pi^{12}}{13!} + \dots}{\frac{1}{3!} + \frac{\pi^4}{7!} + \frac{\pi^8}{11!} + \frac{\pi^{12}}{15!} + \dots} = \frac{\frac{1}{\pi} \left(\pi + \frac{\pi^5}{5!} + \frac{\pi^9}{9!} + \frac{\pi^{13}}{13!} + \dots \right)}{\frac{1}{\pi^3} \left(\frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^7}{7!} + \frac{\pi^{11}}{11!} + \frac{\pi^{15}}{15!} + \dots \right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\pi} \left(\frac{\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} + \sin \pi}{2} \right)}{\frac{1}{\pi^3} \left(\frac{\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} - \sin \pi}{2} \right)}$$

$$= \pi^2$$

P247 13. 理学院 廖国勇

13. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} x^n$ 的收敛域

解: $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = 1 \quad R = \frac{1}{\rho} = 1$

当 $x=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{cases} \text{收敛} & p > 1 \\ \text{发散} & p \leq 1 \end{cases}$

当 $x=-1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} (-1)^n$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} (-1)^n \quad \begin{cases} \text{收敛 (满足莱布尼兹定理条件)} & p > 0 \\ \text{发散} & (\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} (-1)^n \neq 0) \quad p \leq 0 \end{cases}$

综上所述有,

$p \leq 0,$

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} x^n$ 的收敛域为 $(-1, 1)$

$0 < p \leq 1,$

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} x^n$ 的收敛域为 $[-1, 1)$

$p > 1,$

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} x^n$ 的收敛域为 $[-1, 1]$

P247 三. 证明题 理学院 廖国勇

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x_1=3$ 处发散, 在 $x_2=-1$ 处收敛, 指出该级数的收敛半径, 并证明之.

解: 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛半径为: $R=2$

证明: 因为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x_1=3$ 处发散, 所以当 $|x-1| > |3-1|$

即 $|x-1| > 2$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 发散 (阿贝尔定理)

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x_2=-1$ 处收敛, 所以当 $|x-1| < |-1-1|$

即 $|x-1| < 2$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 绝对收敛 (阿贝尔定理)

综上所述, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 $[-1, 3)$

显然 $R=2$